Centre culturel Saint-Exupéry
Espace Culture Média
esplanade A. Malraux, Reims

Fractales : art, nature et mathématiques

Olivier Nocent
Maître de Conférence en Informatique
Université de Reims Champagne-Ardnne
olivier.nocent@univ-reims.fr

Une première tentative de définition

« …sera désignée par l'un des deux néologismes synonymes, *objet fractal* et *fractale*, termes que je viens de former, pour les besoins de ce livre, à partir de l'adjectif latin *fractus*, qui signifie irrégulier ou brisé. »

LES OBJETS FRACTALS

Forme, hasard et dimension

Benoît Mandelbrot, 1975

Une définition plus « formelle »

« Un objet fractal est un ensemble mathématique dont la dimension de Hausdorff-Besicovitch est supérieure à sa dimension topologique. »

Origines de la théorie des objets fractales

« Les Atomes » Jean Perrin, 1913
Source d'inspiration de Benoît Mandelbrot

- Géométrie de la nature peuplée d'objets familiers aux formes irrégulières et brisées.
- Entre le domaine du désordre incontrôlé (chaos) et l'ordre excessif d'Euclide (géométrie), apparaît une nouvelle zone d'ordre fractale.

« ... Nous abandonnons la rationalité euclidienne au profit de processus imprévus et non programmés. »
Extrait du Manifeste Fractaliste, 1997

« Galerie des Monstres » de Villekin (1965)

Musée d'Art Mathématique rassemblant des figures géométriques « pathologiques » aux propriétés paradoxales.

Scepticisme de la communauté scientifique

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivée » Charles Hermitte (1822-1901)

Retour à la nature

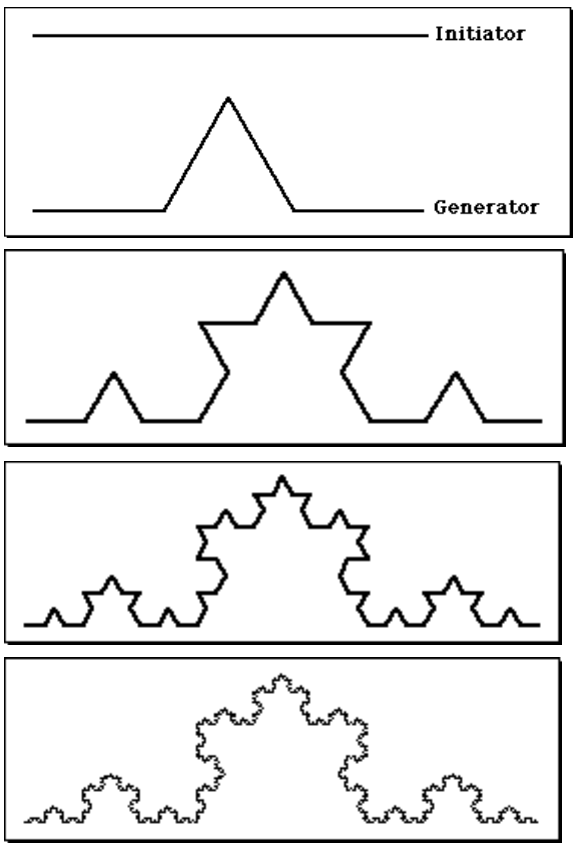
« Nous nous rapprochons de la réalité, en considérant que la plupart des arcs rencontrés dans la nature sont non rectifiables. Cette affirmation est contraire à la croyance que les arcs non rectifiables sont une invention des mathématiciens, et que les arcs naturels sont rectifiables : c'est le contraire qui est vrai »

H. Steinhaus, 1954

« …Sans doute notre intuition prévoyait-elle que l'absence de tangente et la longueur infinie de la courbe sont liés à des détours infiniment petits que l'on ne peut songer à dessiner… j'ai toujours été surpris d'entendre dire que l'intuition géométrique conduisait fatalement à penser que toute fonction continue est dérivable… »

P. Lévy, 1970

Courbe de Helge Von Koch (1904)



F_0 F_1 F_2 F_3 F_4

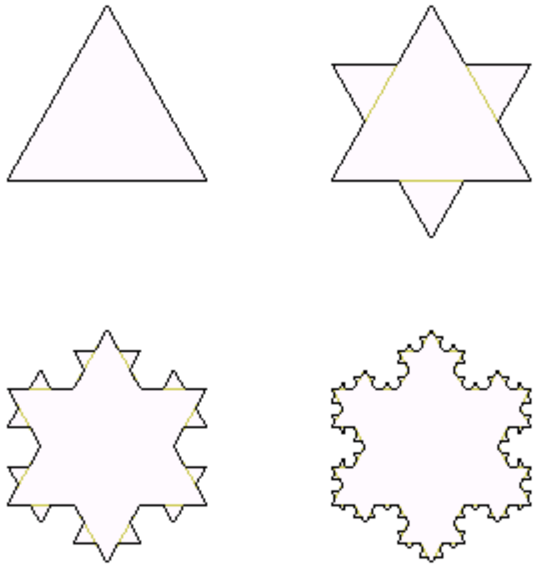
Construction géométrique *récursive* :

Pour construire F_{n+1}, on découpe chaque segment de F_n en trois. On remplace le segment central par deux segments de même longueur afin de constituer un triangle équilatéral.

La courbe de Von Koch est la courbe limite F_n quand n tend vers l'infini.

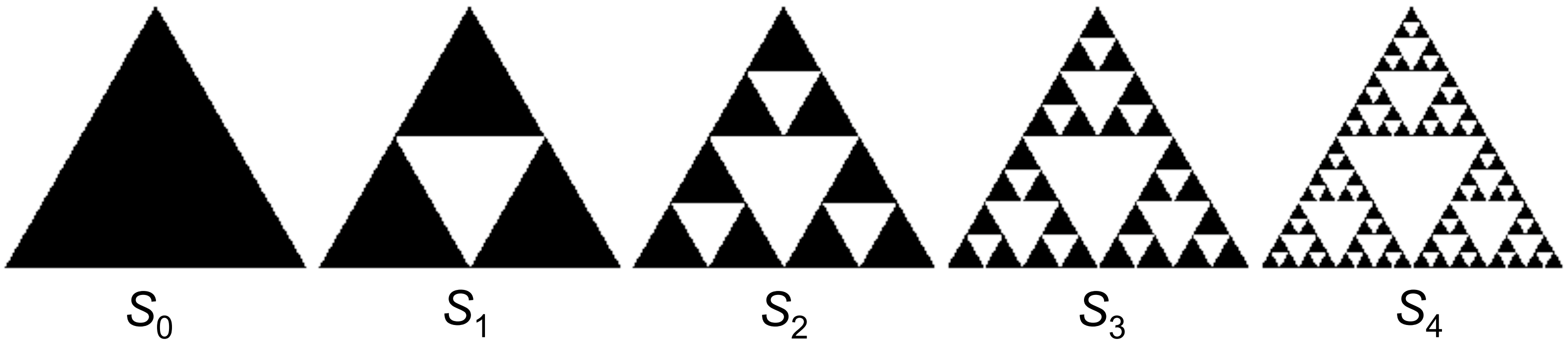
Le périmètre de la courbe augmente de 4/3 à chaque itération. Par conséquent, le périmètre de la courbe de Von Koch est infini bien que l'aire sous la courbe soit finie.

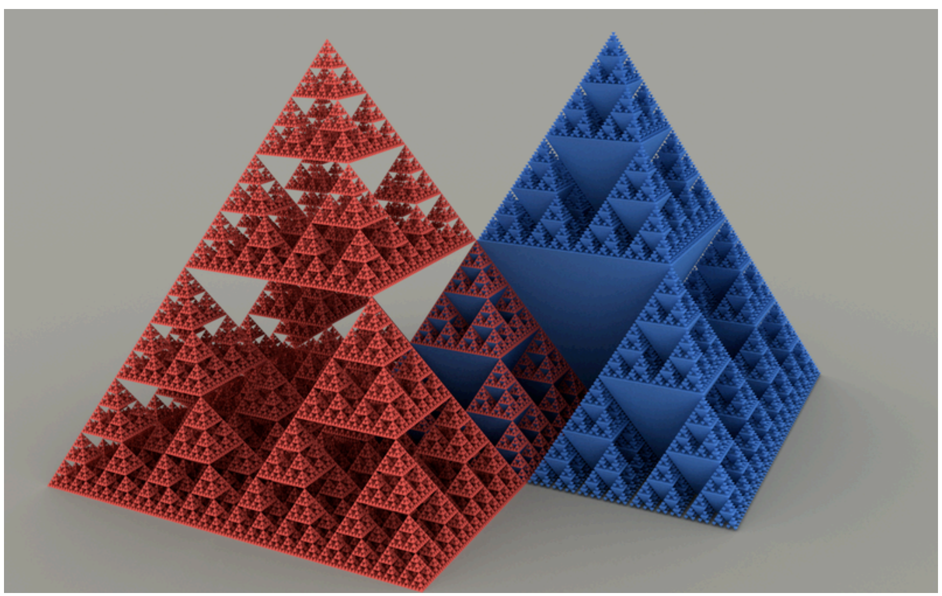
Flocon de neige de Helge Von Koch (1904)



Chaque coté du triangle équilatéral est le support initial d'une courbe de Von Koch.

Triangle de Sierpinski (1915)

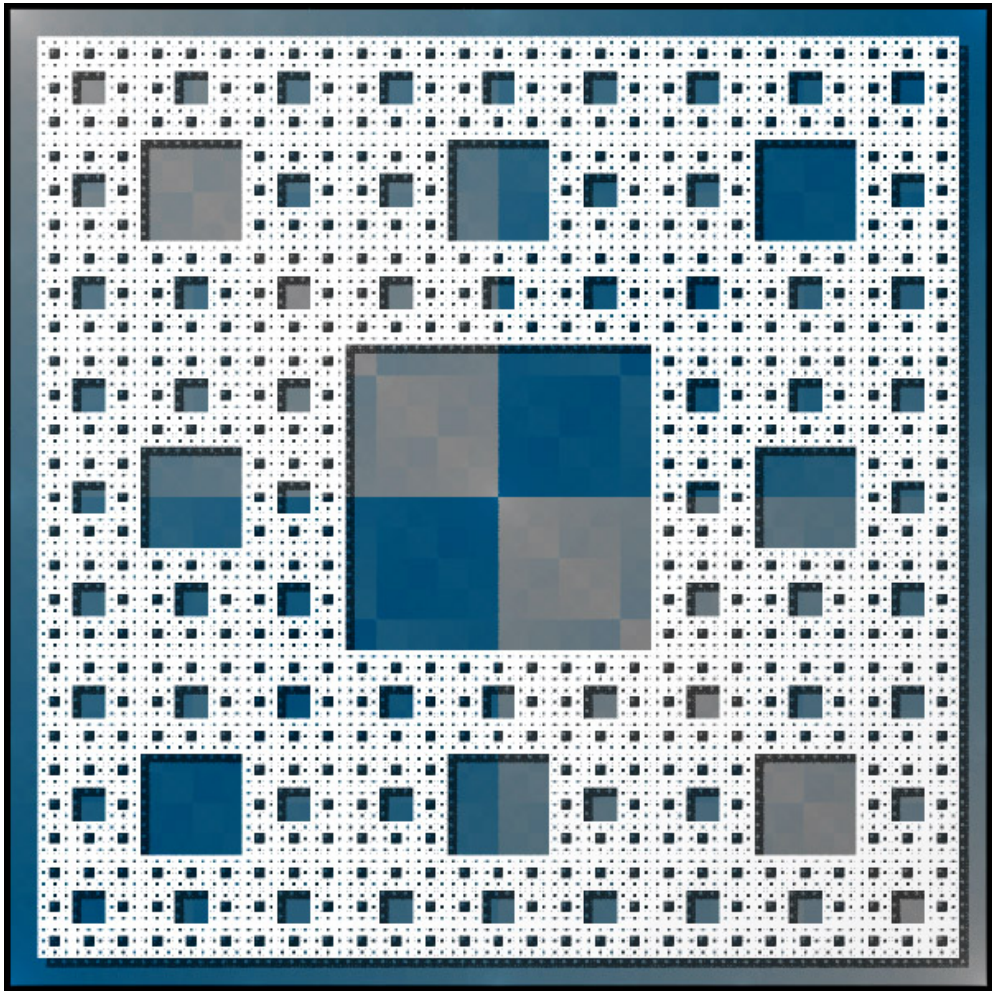




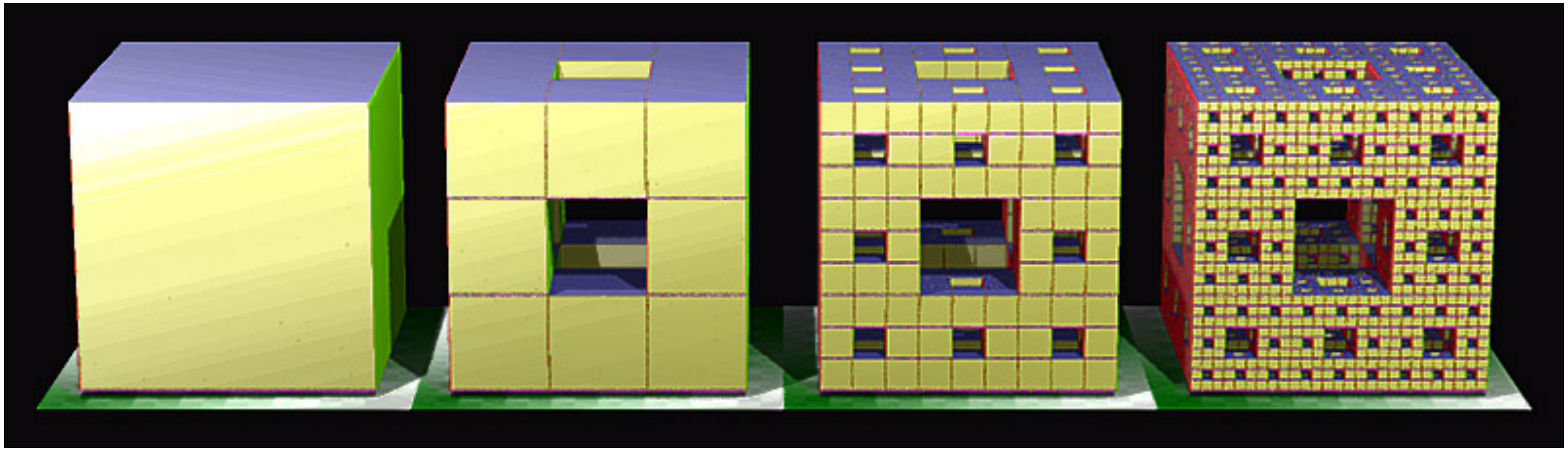
Construction géométrique *récursive* :

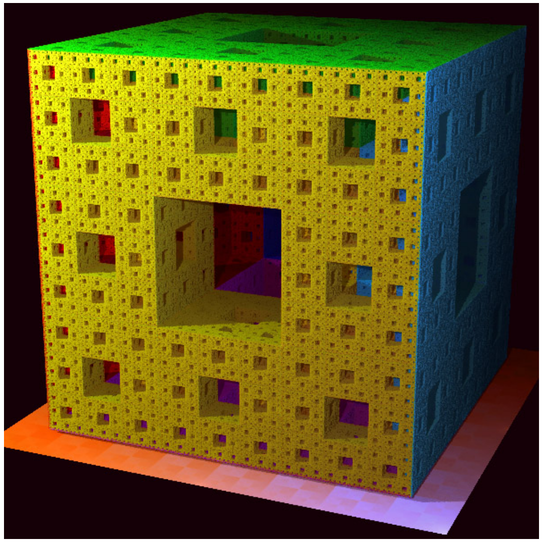
Pour construire S_{n+1}, on retranche à chaque triangle plein de S_n une portion triangulaire 4 fois plus petite.

« Tapis » de Sierpinski (1915)



« Eponge » de Sierpinski-Menger (1915)

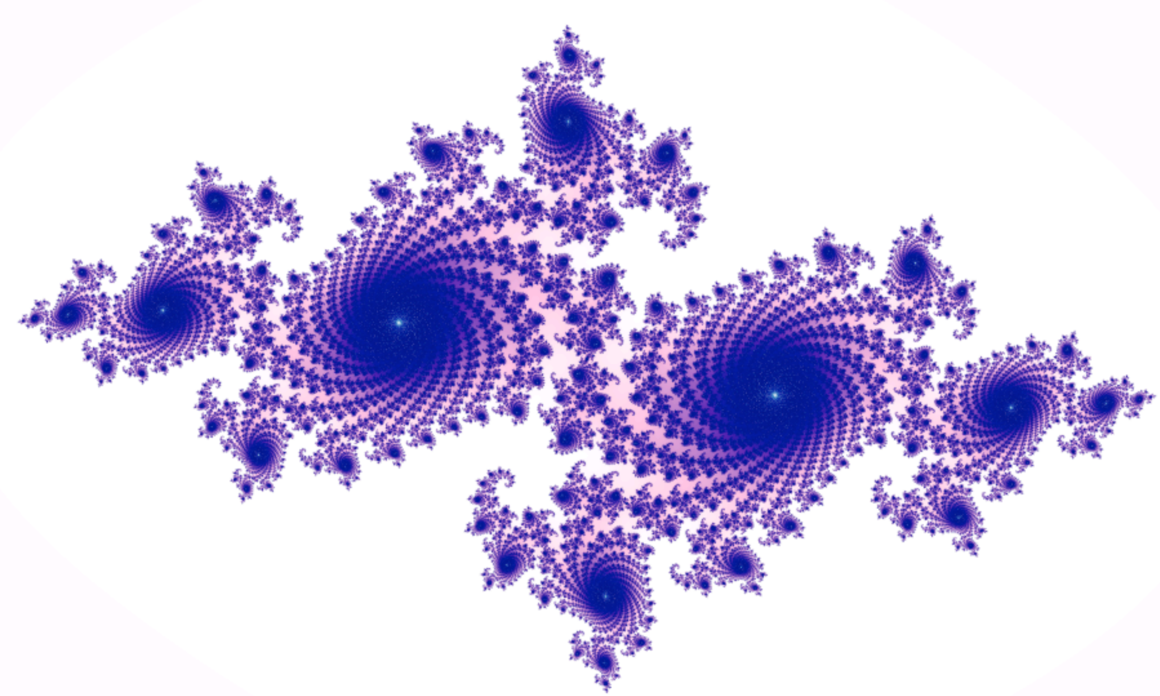




Ensemble de Julia (1918)

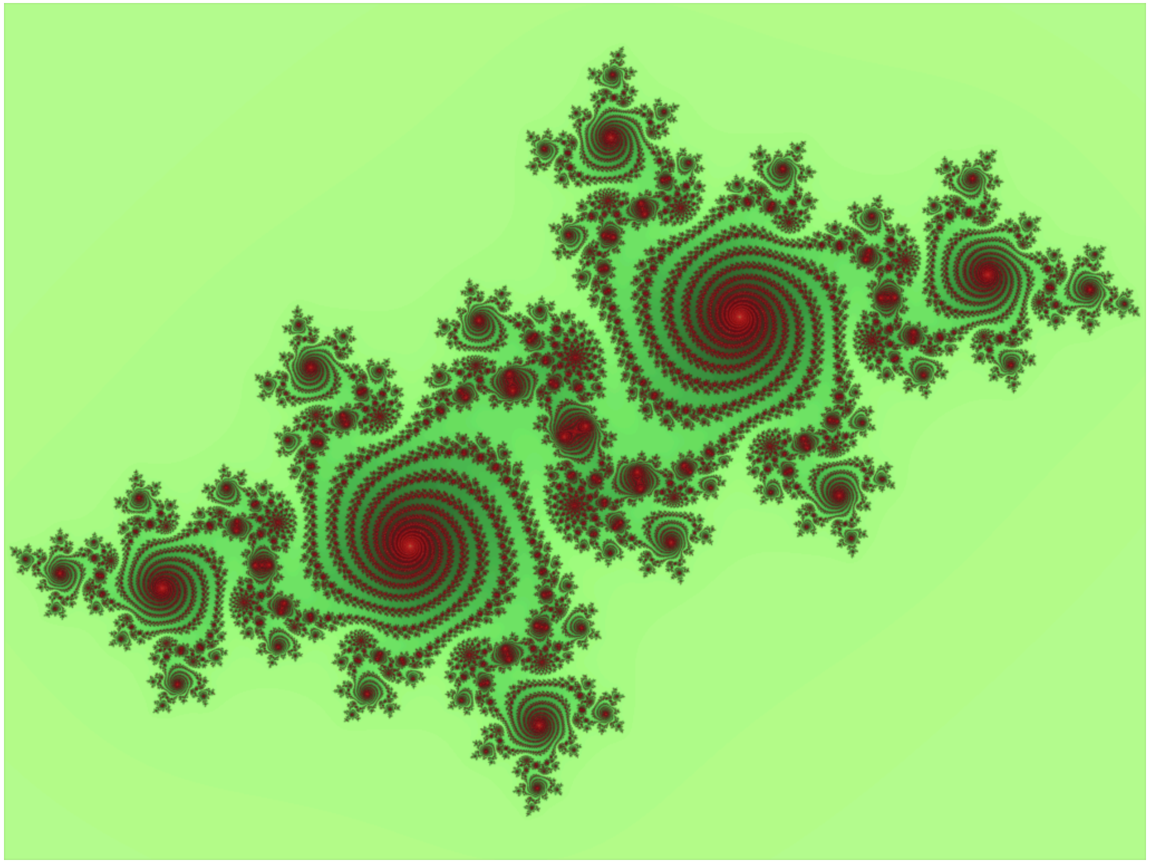
Suite complexe récurrente

$J = \{ z \in \mathbb{C} : \exists\, k>0\ \forall\, n>0\ |z_n|<k \}$ où $z_{n+1} = z_n^{\,2} + c$ et $z_0 = z$



Ensemble de Julia (1918)

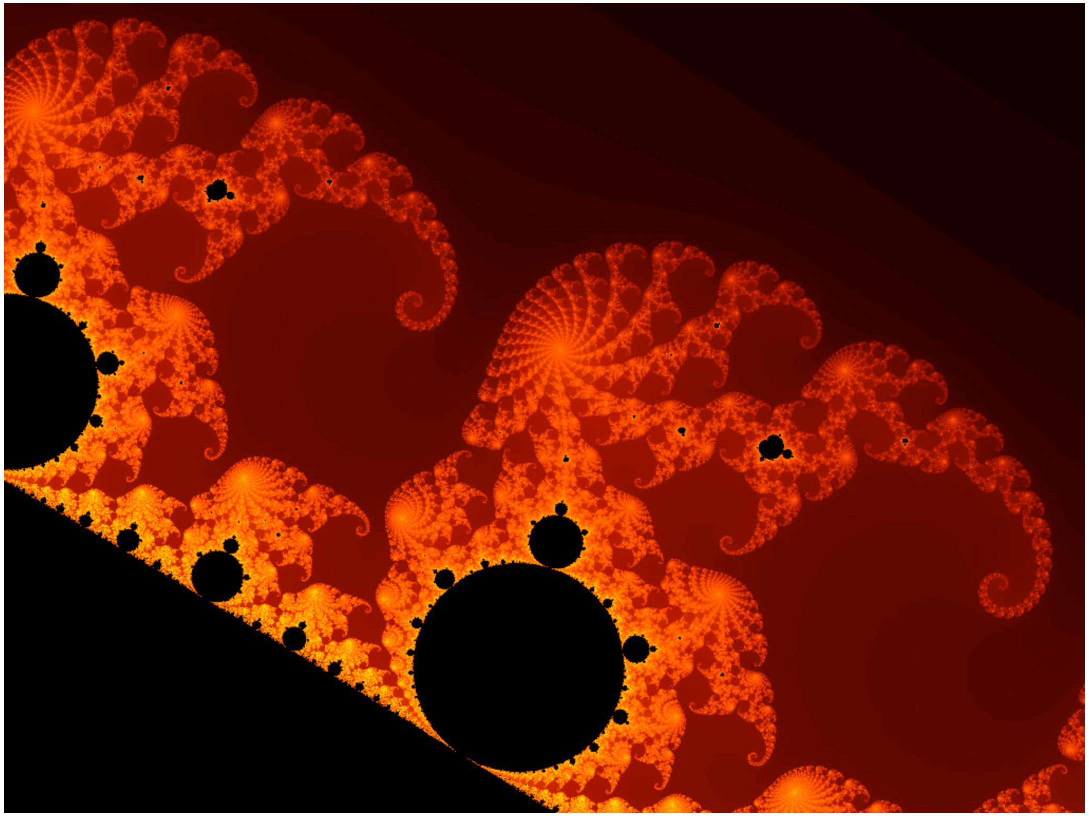
Même construction mais avec une constante c différente.



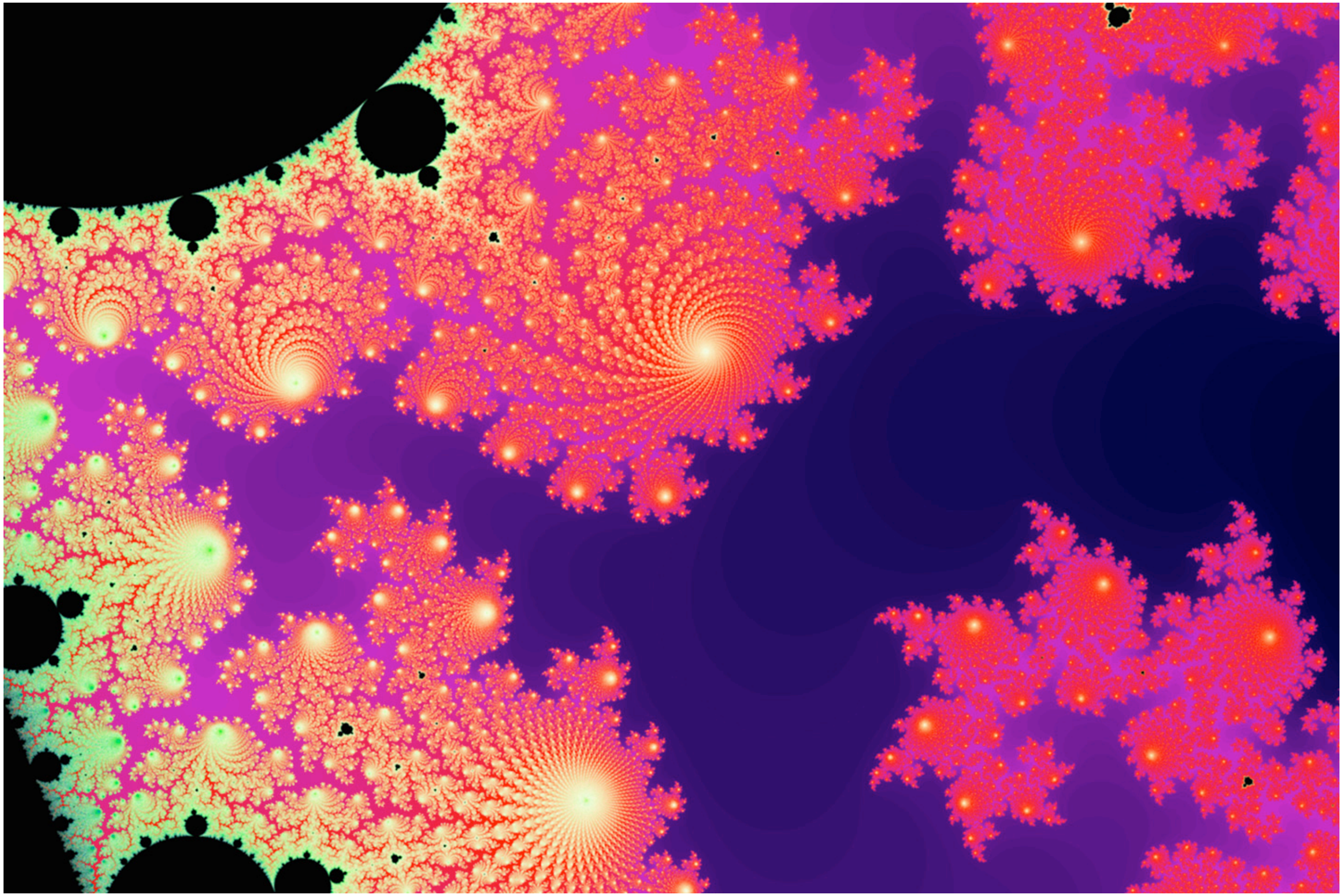
Ensemble M de Benoît Mandelbrot (1975)

Suite complexe récurrente

$M = \{ z \in \mathrm{C} : \exists\, k > 0\ \forall\, n > 0\ |z_n| < k \}$ où $z_{n+1} = z_n{}^2 + z_0$ et $z_0 = z$



Ensemble M de Benoît Mandelbrot (1975)



Traits caractéristiques des objets fractals

- Structure irrégulière et complexe
- Autosimilarité : un détail de la figure est, au facteur d’échelle près, identique au tout.

« … Notre activité fractaliste se manifeste au travers d’univers où abondent les formes aléatoires et proliférantes.

…Toutes nos oeuvres son maximalistes; c’est par l’excès d’informations que l’on accède au vertige fractal. »

Extrait du manifeste fractaliste, 1997

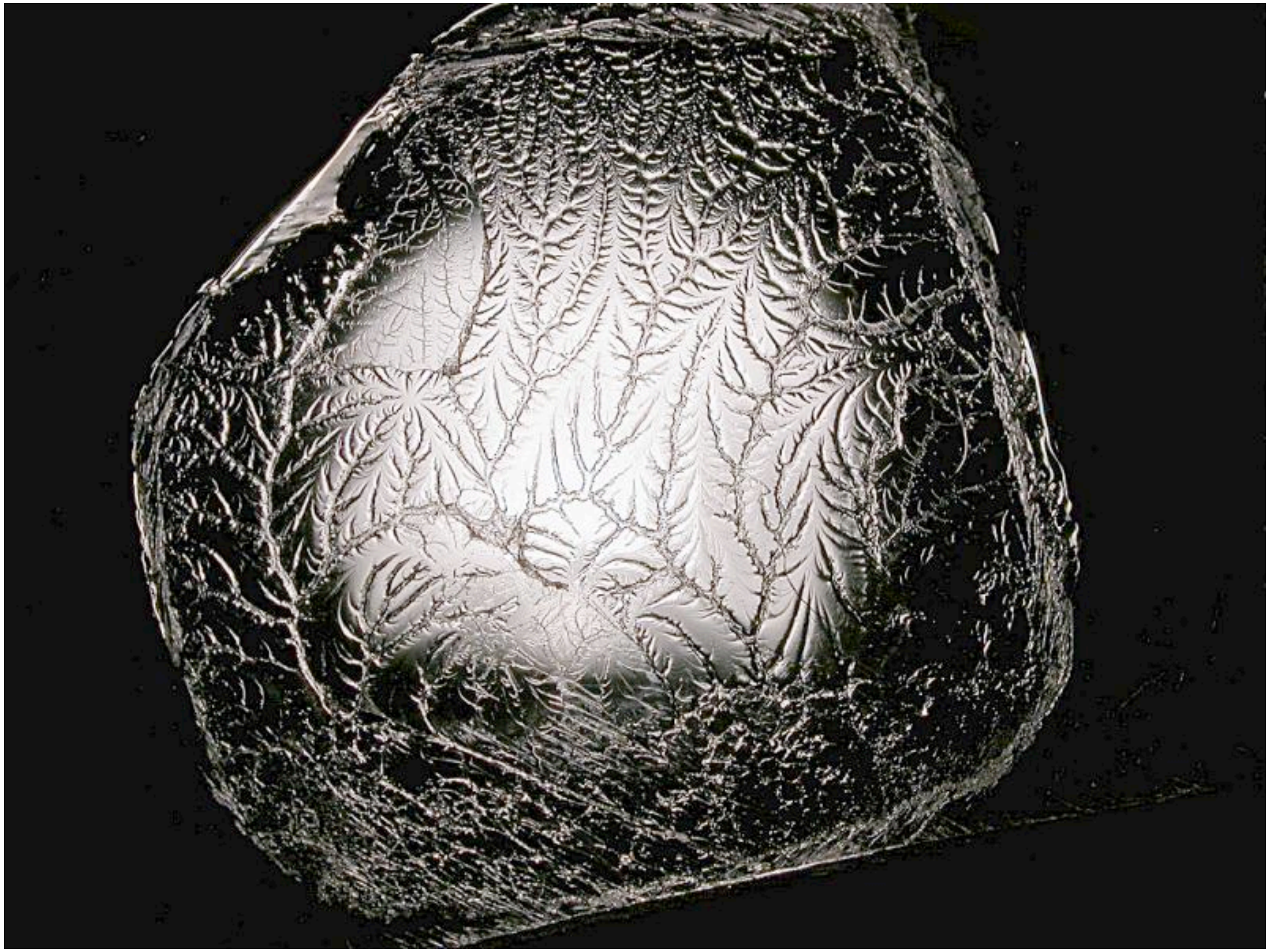
Nature et objets fractals

Chou Romanesco

Nature et objets fractals

Flocon de neige

Nature et objets fractals



Interface entre deux plaques d'acrylique recouvertes de colle

Nature et objets fractals

Conus Aulicus

Coquillage appartenant à la classe des *Gastropodes*.

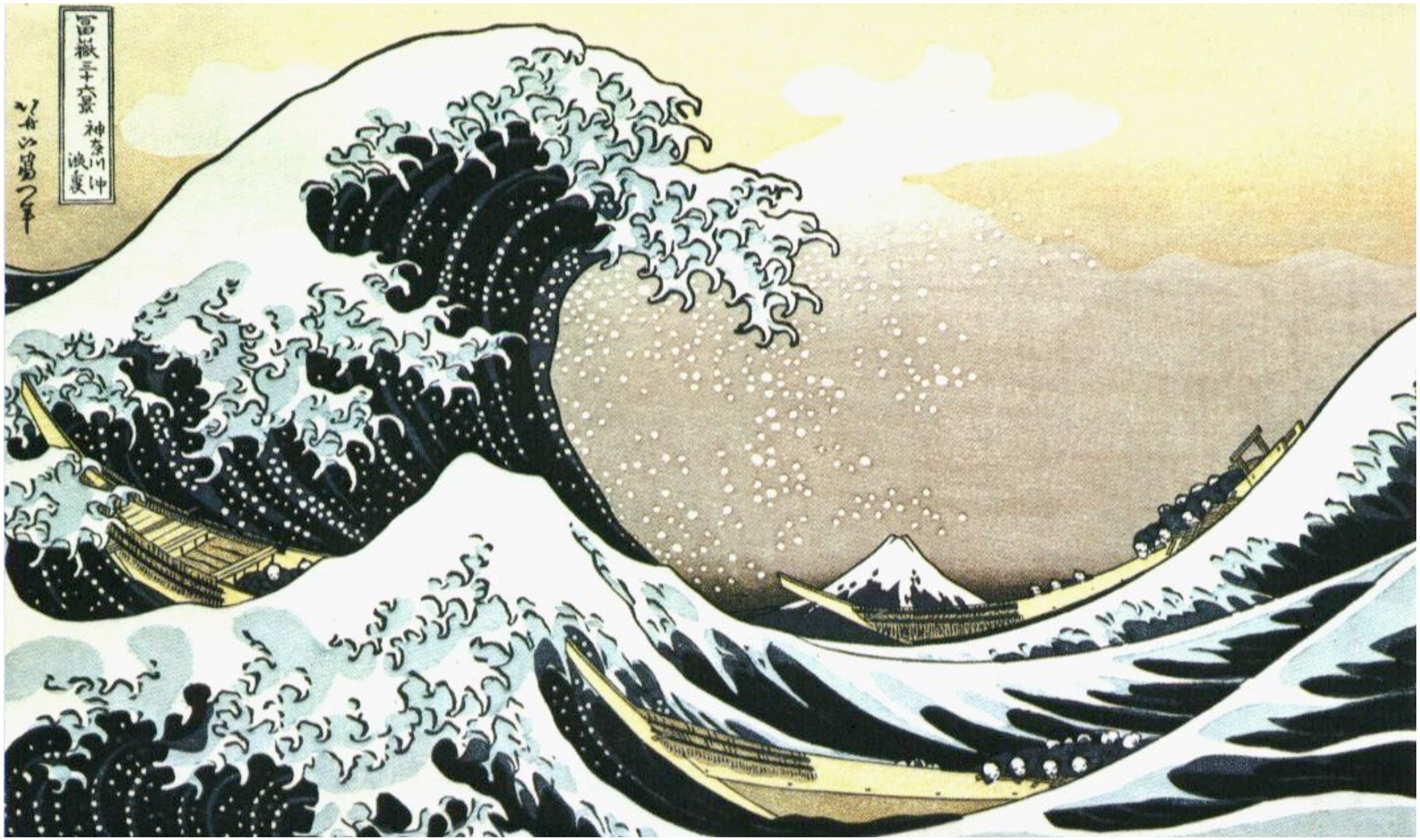
Nature (virtuelle) et objets fractals

Paysage numérique généré à partir de règles fractales
(logiciel Terragen)

Nature (virtuelle) et objets fractals

Paysage numérique généré à partir de règles fractales
(logiciel Terragen)

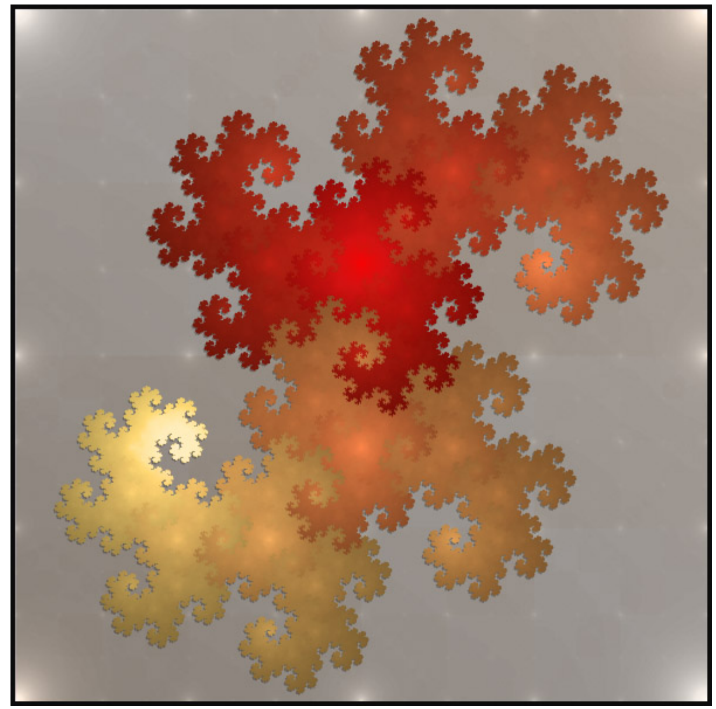
Art : représentation de la nature fractale



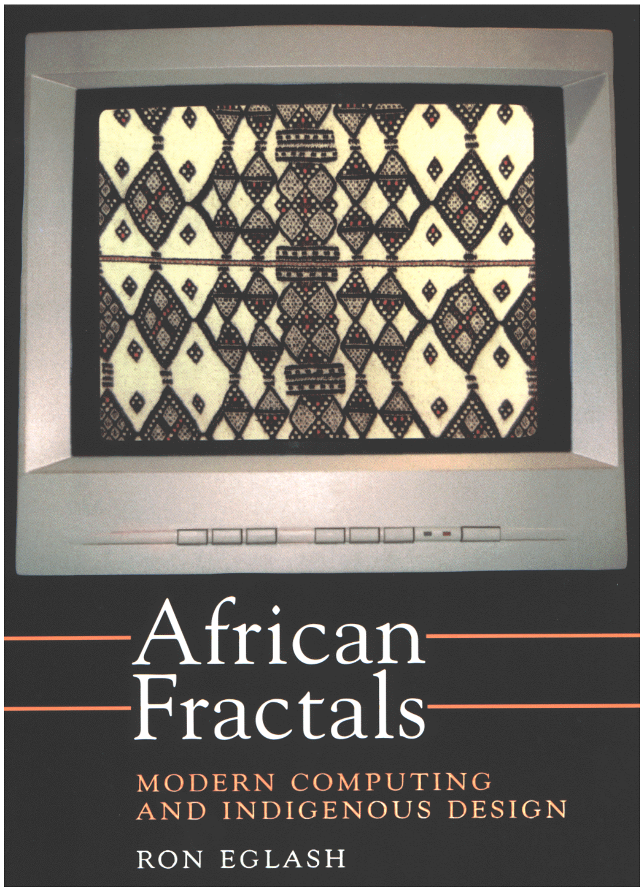
« La grande vague de Kanagawa » de Hokusai Katsushika (1760-1849)

Art : représentation de la nature fractale

Similitudes avec la courbe de Lévy, aussi appelée « courbe du Dragon »



Ethnomathématiques

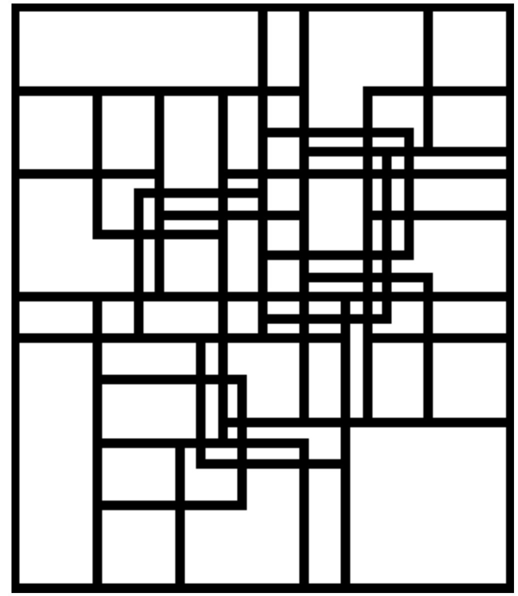


Docteur Ron Eglash
Professeur associé
Département des études scientifiques et technologiques
Institut Polytechnique de Rensselaer
New York

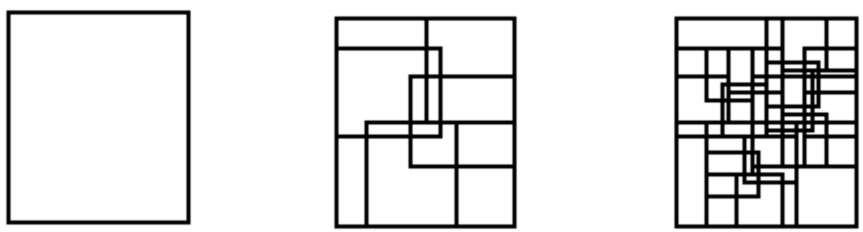
Ethnomathématiques

Vue aérienne de la cité de Logone-Birni au Cameroun.

L'édifice centrale est un palais



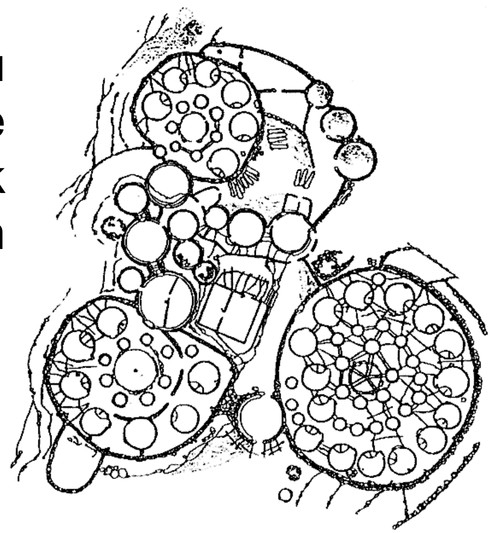
Modèle fractal du palais



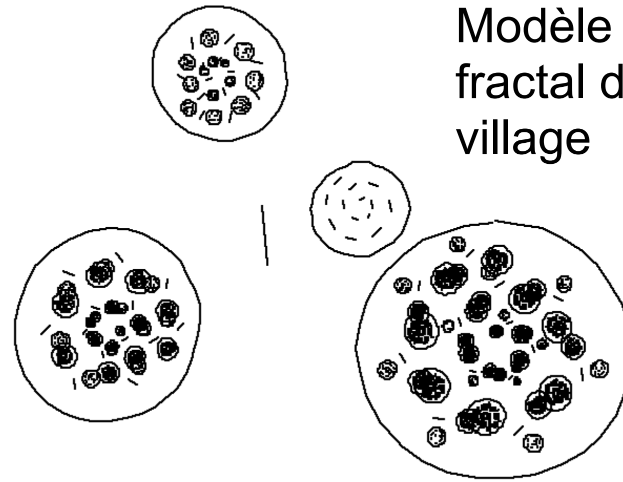
Les trois premières itérations du modèle fractal.

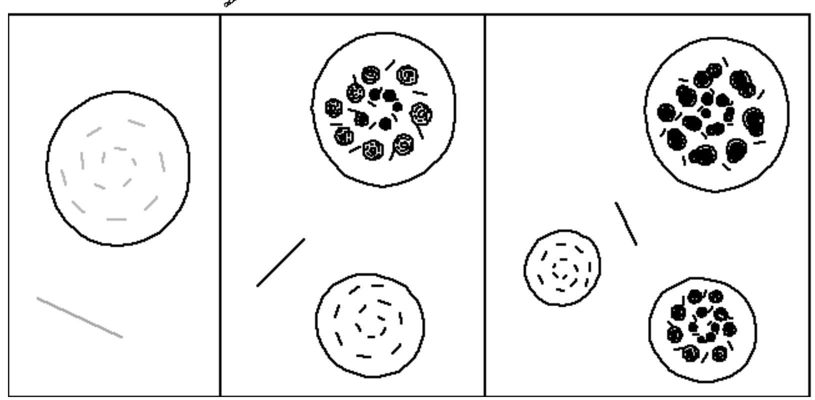
Ethnomathématiques

Plan du village de Moukoulek au Cameroun



Modèle fractal du village





Les trois premières itérations du modèle fractal.

Ethnomathématiques

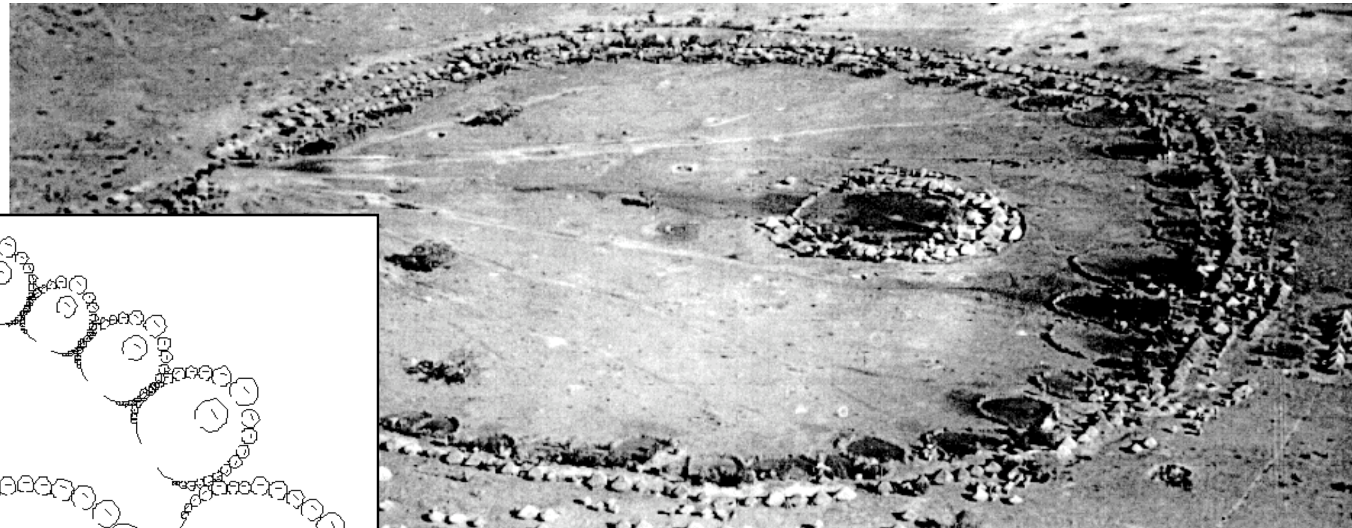
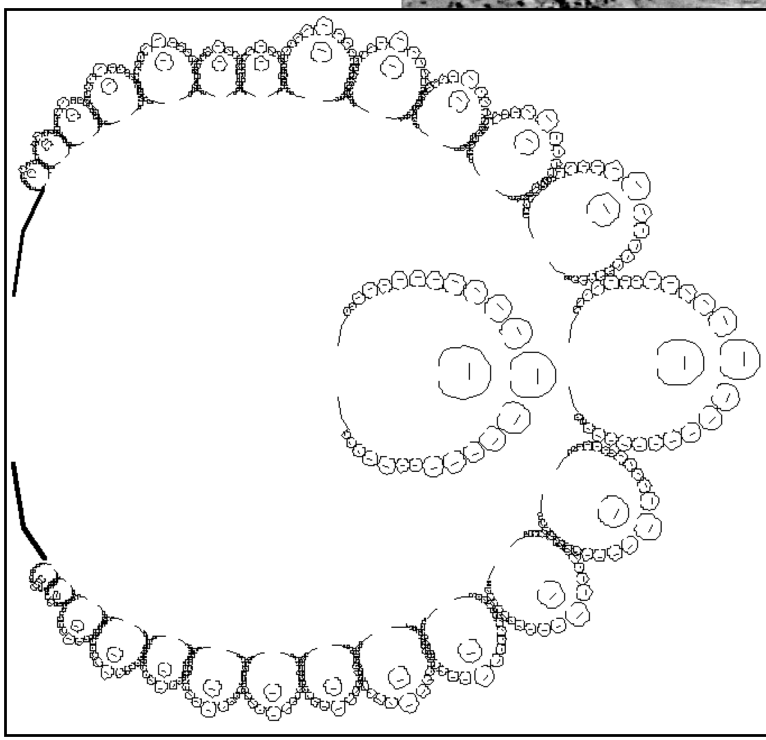


Photo aérienne du camp
de Bila-Ila avant 1944



Modèle fractal correspondant

Combien mesure donc la côte de la (Grande) Bretagne ?

Question posée par B. Mandelbrot en 1975 dans « Objets fractals »

La longueur de la côte fluctue en fonction de l'échelle d'observation sans jamais se stabiliser.

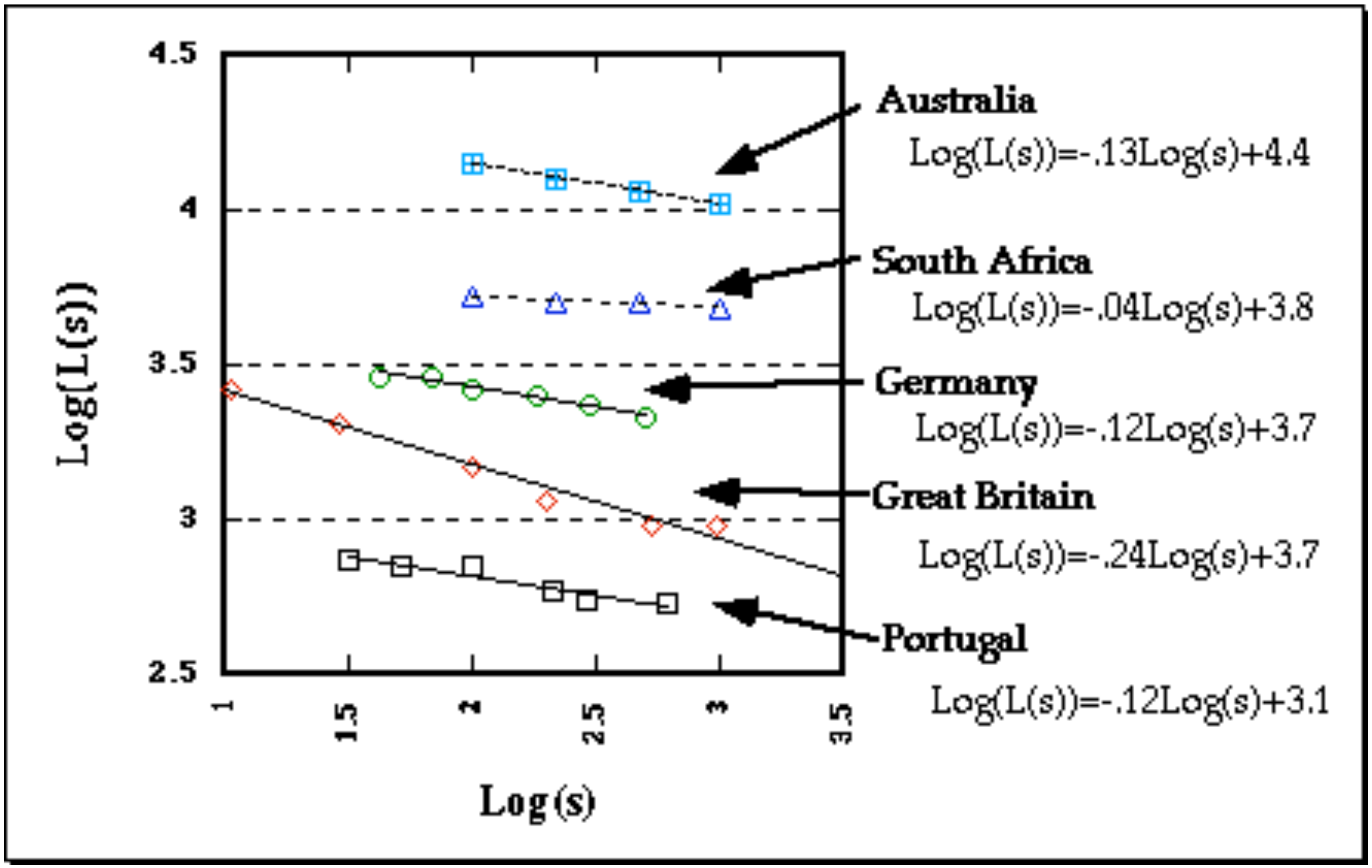
Formellement, la longueur de la côte de la (Grande) Bretagne est infinie.

Similitudes avec la courbe de Von Koch

Etude de la longueur des côtes

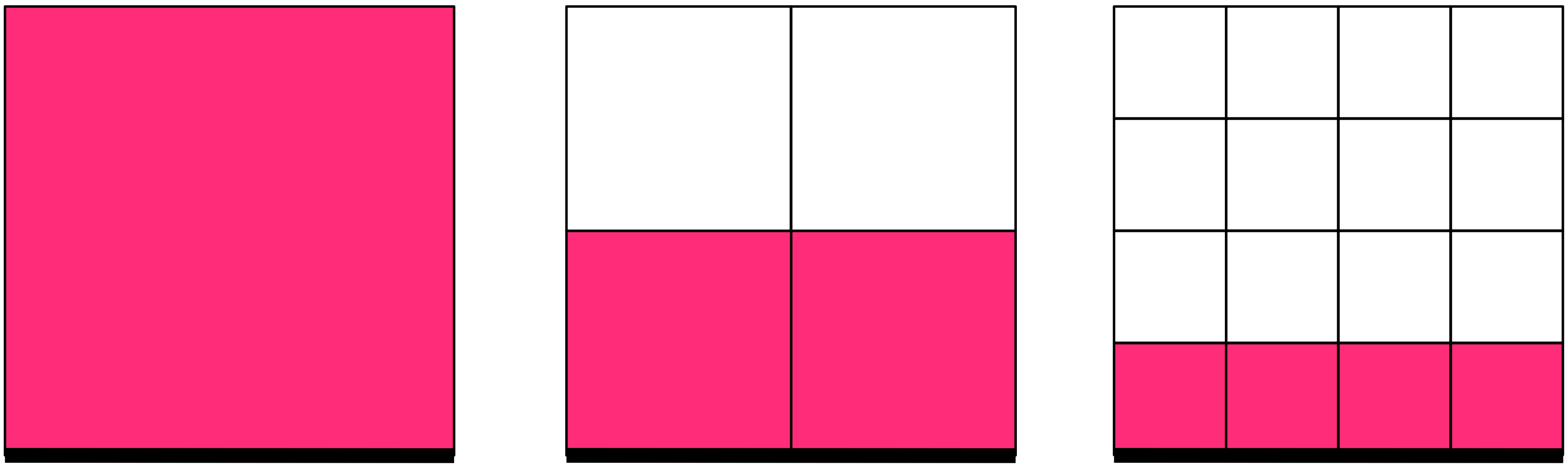
Loi empirique de Lewis Fry Richardson (1961)

$L(s) = Ms^{1-D}$ ou $Log(L(s)) = (1-D) Log(s) + Log(M)$



Dimension fractale *D*

Segment unitaire de dimension géométrique égale à 1.

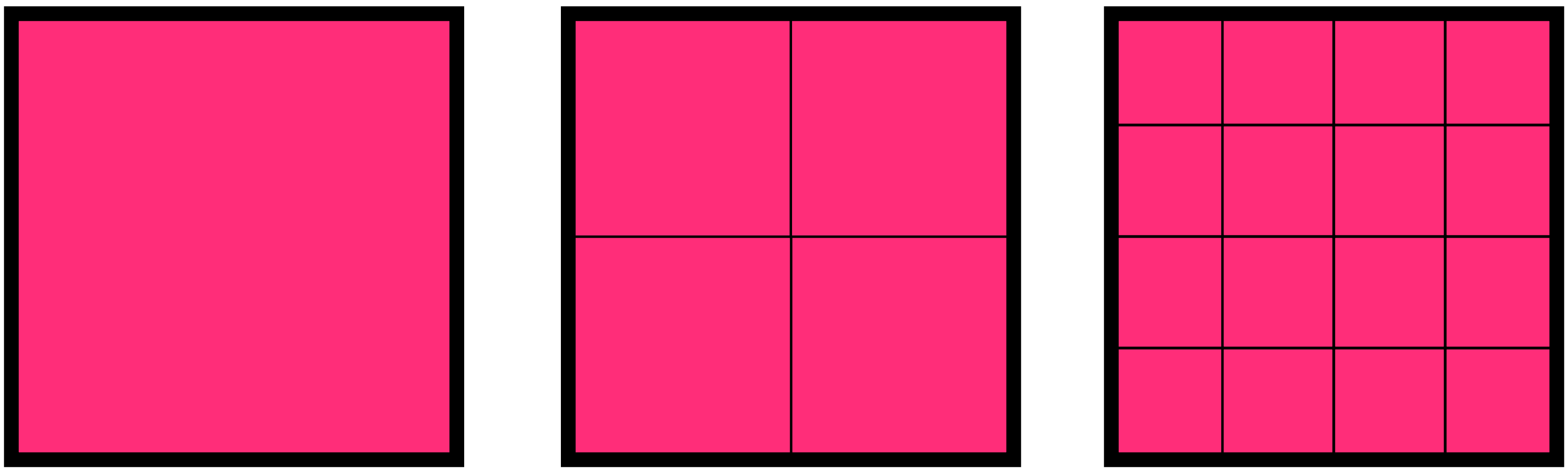


$a = 1$ et $N(a) = 1$ $a = 1/2$ et $N(a) = 2$ $a = 1/4$ et $N(a) = 4$

$$N(a) = 1/a$$

Dimension fractale *D*

Carré unitaire de dimension géométrique égale à 2.



a = *1* et *N*(*a*) = *1* — *a* = *1/2* et *N*(*a*) = *4* — *a* = *1/4* et *N*(*a*) = *16*

$$N(a) = (1/a)^2$$

Dimension fractale *D*

Définition proposé par B. Mandelbrot :

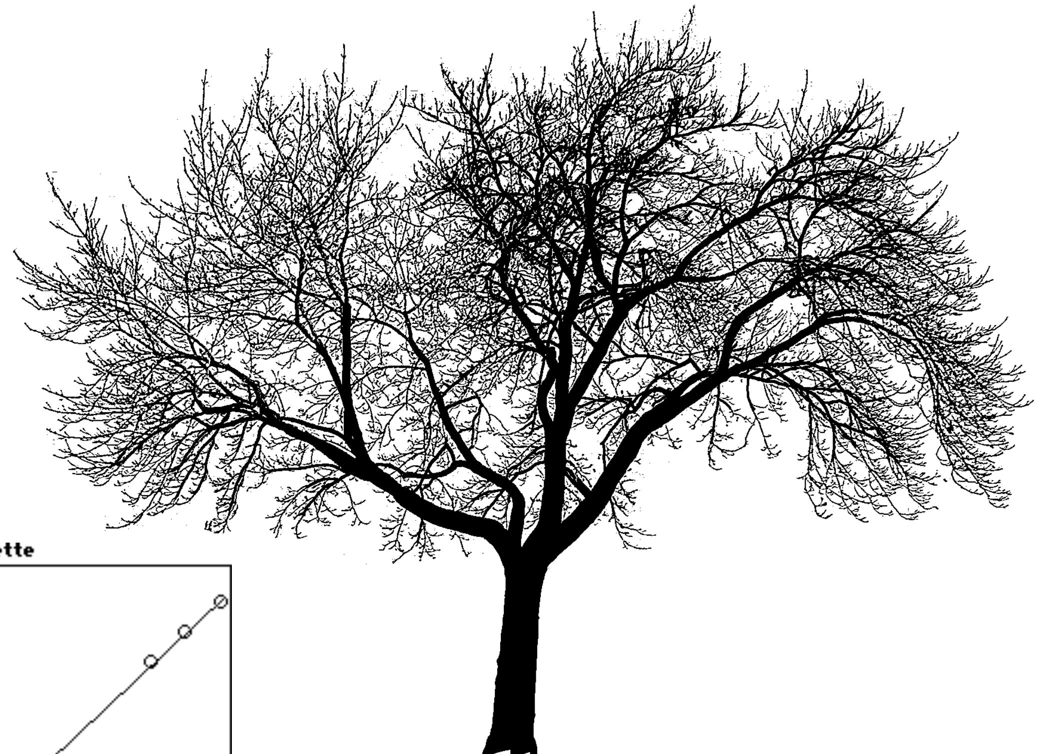
D est la dimension fractale d’un ensemble si :

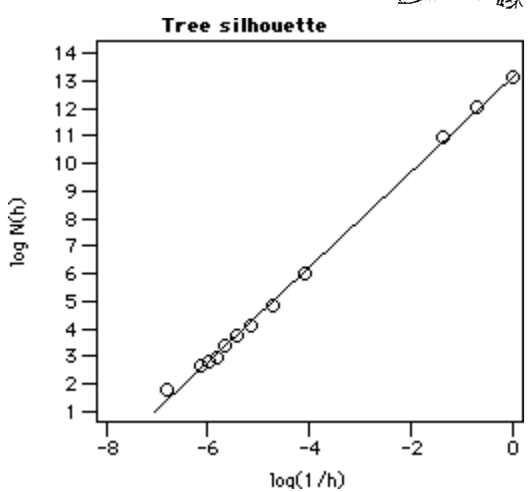
$$N(a) \approx (1/a)^D$$

$$Log(\ N(a)\ ) \approx -D\ Log\ (a)$$

Dimension fractale *D*

Dimension fractale de la silouhette d'un arbre.





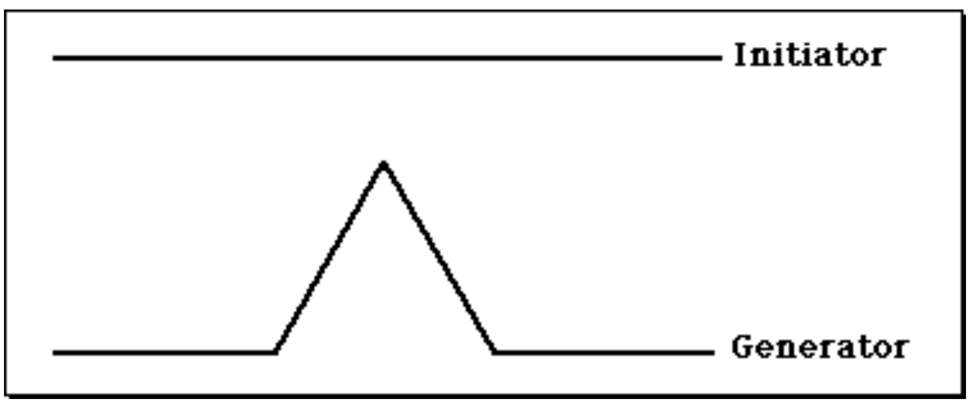
Dimension d'homothétie *D*

Extension de la dimension fractale aux constructions géométriques récursives à homothétie interne (figures autosimilaires)

$$Log(\ N\ ) \approx D\ Log\ (1/r)$$

N : nombre de segments

r : rapport d'homothétie



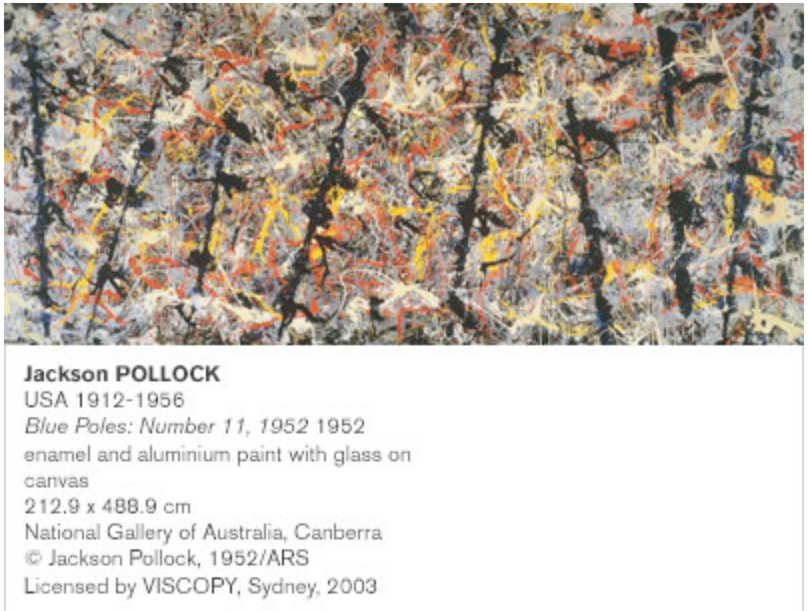
Ligne de Von Koch composée de 4 segments de longueur égale au 1/3 de la longueur initiale.

D = Log(4)/Log(3) = 1.2618…

Expressionisme fractal : Jackson Pollock

Jackson Pollock, chef de file de l'expressionnisme abstrait (action painting) utilisant sa technique du *dripping*.

Dimension fractale et authentification des toiles de Jackson Pollock



Richard Philip Taylor
Département de Physique
Université de New South Wales
Australie

Mesure de la dimension fractales des peintures de J. Pollock.