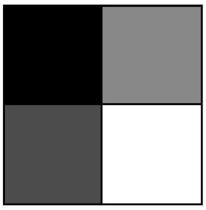
TD n°5
Applications du changement de base (1)

Compression simple d'une image en niveaux de gris.

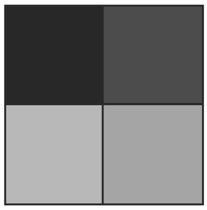
Introduction :
Une image en niveaux de gris sera représentée par une matrice de taille hauteur × largeur, correspondant aux dimensions, en pixel, de l'image.
Chaque composante de la matrice est une valeur de [-1 ; 1], donnant la luminance (en niveaux de gris) d'un pixel. La valeur (-1) représentera le noir, 0 un gris et 1 le blanc.

Exemple 1 :



À l'image de 2×2 pixels ci-dessus, nous associons la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2 :



À l'image de 2×2 pixels ci-dessus, nous associons la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

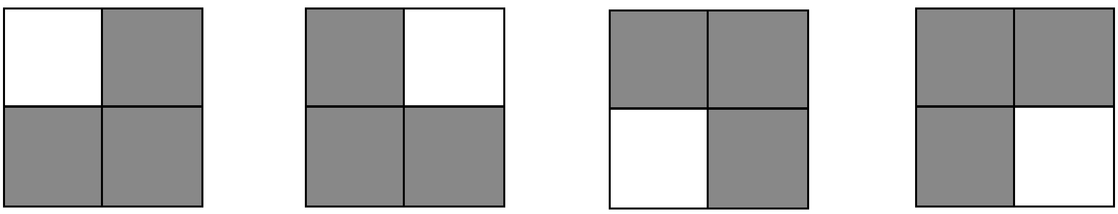
2.1 Compression dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Chaque image est découpée en carrés de 2×2 pixels. Ces carrés vont être assimilés à des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ exprimés dans la base canonique classique B.

Le carré de l'exemple 2, soit $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, est assimilé dans $\mathbb{R}^4$ au vecteur $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, soit :

$$(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{3}{4}(1, 0, 0, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 1, 0) + \frac{1}{4}(0, 0, 0, 1)$$

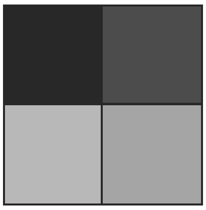
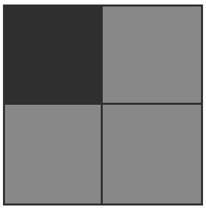
La base canonique {(1, 0, 0, 0), (0 ,1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)} représente alors les quatre carrés :



L'idée de la compression est de ne garder que la composante de poids principal, c'est-à-dire <u>la plus grande coordonnée en valeur absolue</u>.

$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est compressée en $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On ne garde que 25 % de l'information. L'image compressée est obtenue uniquement à partir du premier carré de la base canonique.

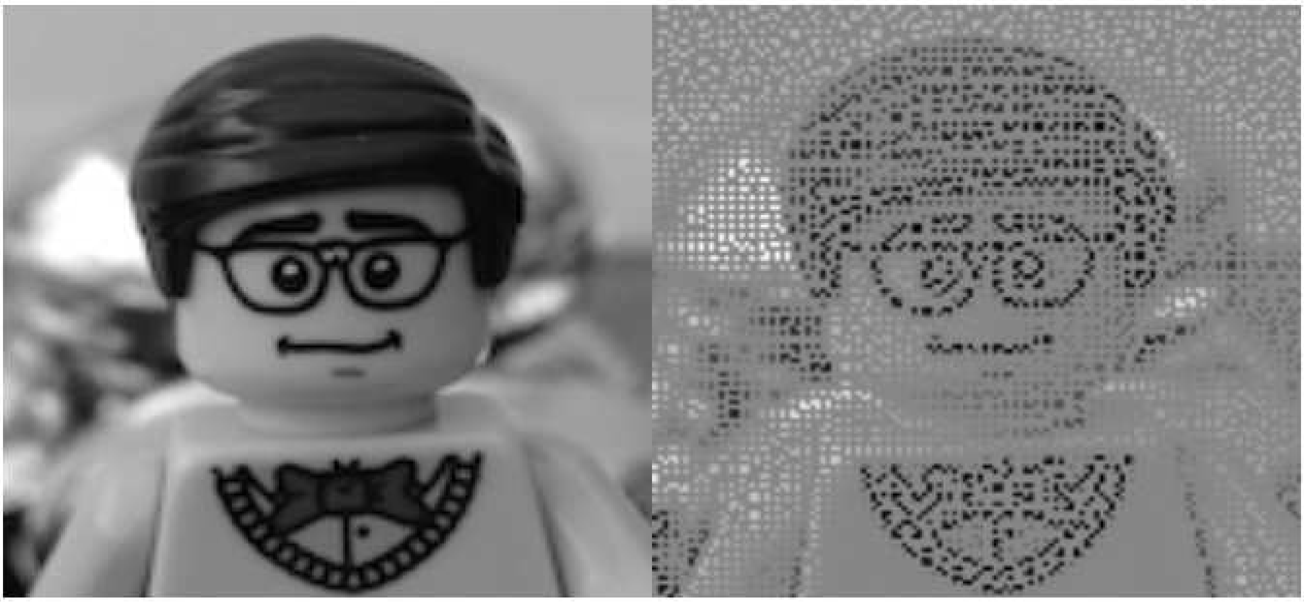
 devient après compression 

Problème : Nous perdons l'information que le carré était à dominante « sombre », avec des pixels contrastés.

Ces coordonnées ne détectent pas si un contraste est important dans le carré 2×2. De même, nous aimerions pouvoir reconnaître les carrés où tous les pixels sont pratiquement du même ton.

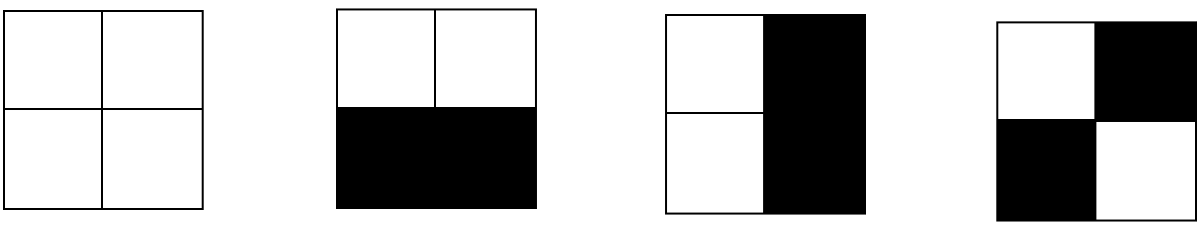
Travailler dans la base canonique n'est donc pas forcément approprié !!

Illustration : Application de la compression en base canonique à une image.



2.2 Compression dans une base « adaptée ».

On choisit par conséquent de se placer dans une base reflétant les contrastes, à savoir les quatre carrés :



Notre nouvelle base B' de $\mathbb{R}^4$ sera alors: B' = {(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1)}.

Exercice 1:

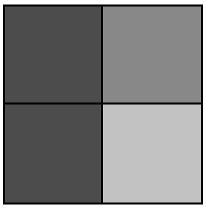
a. Donner P, matrice de passage de B' vers la base canonique B.

b. Calculer P^{-1} grâce au pivot de Gauss.

c. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ dans la nouvelle base B' ?

d. Si on ne choisit de ne garder que la composante de poids principal, quelles sont les coordonnées dans B' du vecteur compressé ? Que devient le carré après compression ?

Exercice 2 :



Le carré est associé à la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

À votre avis, quel carré de la nouvelle base B' va être la composante de poids principal ?

a. Confirmer votre intuition en calculant les coordonnés de $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans la base B'.

b. Quelles sont les coordonnées dans B' du vecteur compressé ? Que devient le carré après compression ?

c. Quelles auraient été les coordonnées du vecteur compressé dans B ?

Illustration : Application de la compression dans B' à une image.