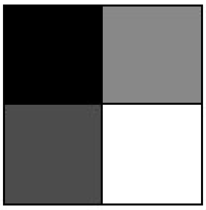
I.U.T informatique **Algèbre linéaire 2**

TD n°4

Introduction :

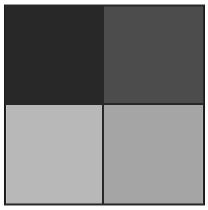
Une image en niveaux de gris sera représentée par un tableau de taille hauteur × largeur, correspondant aux dimensions, en pixel, de l'image.
Chaque composante de la matrice est une valeur de [-1 ; 1], donnant la luminance (en niveaux de gris) d'un pixel. La valeur (-1) représentera le noir, 0 un gris et 1 le blanc.

Exemple 1 :



À l'image de 2×2 pixels ci-dessus, nous associons le tableau $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Exemple 2 :



À l'image de 2×2 pixels ci-dessus, nous associons le tableau $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

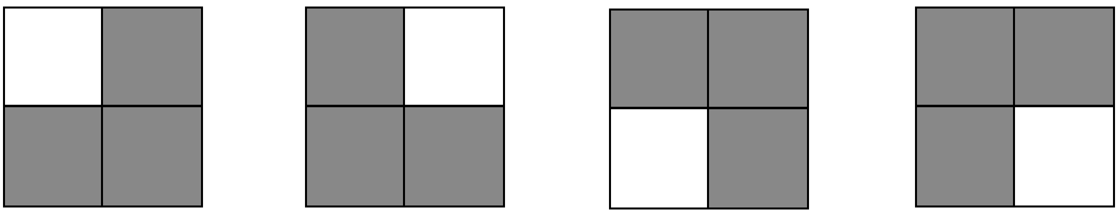
2.1 Compression dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Une image est découpée en carrés de 2×2 pixels. Chaque carré va être assimilé à un vecteur de $\mathbb{R}^4$ exprimé dans la base canonique classique B.

Le carré de l'exemple 2, soit $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, est assimilé dans $\mathbb{R}^4$ au vecteur $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, soit :

$$(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{3}{4}(1, 0, 0, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 1, 0) + \frac{1}{4}(0, 0, 0, 1)$$

La base canonique {(1, 0, 0, 0), (0 ,1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)} représente alors les quatre carrés :



L'idée de la compression est de ne garder que la composante de poids principal, c'est-à-dire <u>la plus grande coordonnée en valeur absolue</u>.

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ est compressée en } \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On ne garde que 25 % de l'information. L'image compressée est obtenue uniquement à partir du premier carré de la base canonique.

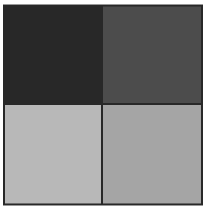
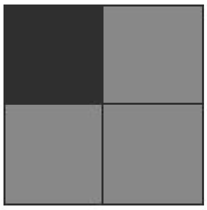
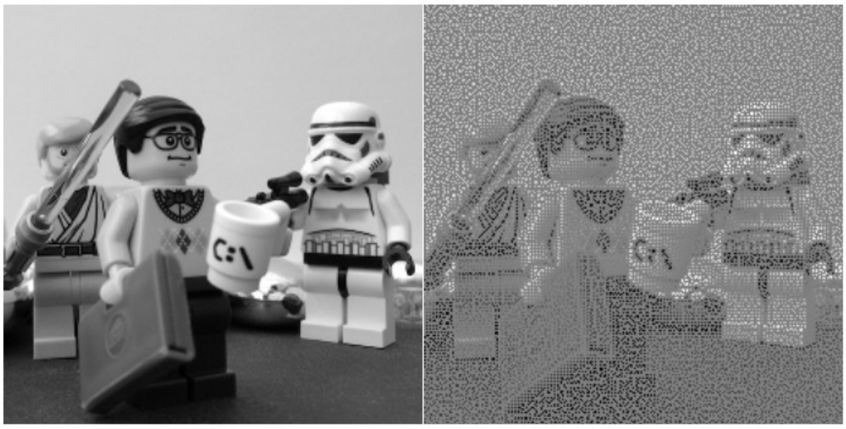

devient après compression


Illustration : Application de la compression en base canonique à une image.



A gauche : l'image originale *A droite : l'image compréssée*

Pour éviter l'effet dentelle, on peut dupliquer la luminance du pixel prépondérant dans les 3 autres.

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ est finalement compressé en } \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

A gauche : l'image originale *A droite : l'image compressée avec duplication de pixe*

Exercice 1 :

En utilisant la méthode précédente, compressez le carré $\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 \\ -0{,}7 & -0{,}8 \end{bmatrix}$, puis le carré $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$.

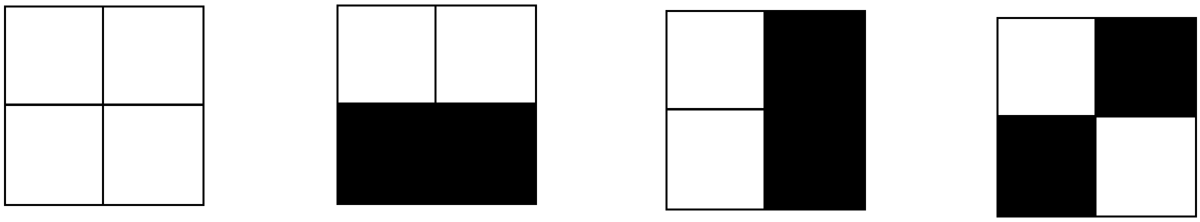
Conclusion :

Cette méthode ne détecte pas si un contraste est important dans le carré 2×2. De même, nous aimerions pouvoir reconnaître les carrés où tous les pixels sont pratiquement du même ton.

Travailler dans la base canonique n'est donc pas forcément approprié !!

2.2 Compression dans une base « adaptée ».

On choisit par conséquent de se placer dans une base reflétant les contrastes, à savoir les quatre carrés :

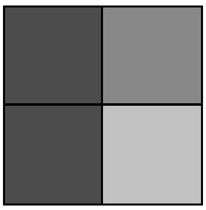


Notre nouvelle base B' de $\mathbb{R}^4$ sera alors: B' = {(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1)}.

Exercice 2 :

1. Donner P, matrice de passage de B' vers la base canonique B.
2. On définit la matrice Q par Q = $\frac{1}{4}\times$P. Calculer Q$\times$P. Quelle matrice de passage représente Q ?
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ dans la nouvelle base B' ?
4. Si on ne choisit de ne garder que la composante de poids principal, quelles sont les coordonnées dans B' du vecteur compressé ?
5. Quelles sont les coordonées dans B du vecteur compressé ?

Exercice 3 :



Le carré est associé au tableau $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

1. À votre avis, quel carré de la nouvelle base B' va être la composante de poids principal ?
2. Confirmer votre intuition en calculant les coordonnés de $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans la base B'.
3. Quelles sont les coordonnées dans B' du vecteur compressé ?
4. Quelles sont les coordonées dans B du vecteur compressé ?

Illustration : Comparaison des compressions

A gauche : l'image compressée avec duplication de pixel

A droite : l'image compressée dans une base adaptée