Travaux dirigés #2 : variables aléatoires discrètes et lois de probabilité

Éléments de cours

Une variable aléatoire X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On note $\Omega_X = X(\Omega)$.

- La loi de probabilité de X est définie par $\{\mathbb{P}(\{X = k\})/k \in \Omega_X\}$.
- L'espérance de X est définie par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \Omega_X} k.\mathbb{P}(\{X = k\})$
- La variance de X est définie par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Exercice 1

On considère l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce équilibrée. On s'intéresse au côté visible : P ou F.

1. Déterminer l'univers Ω
2. On considère la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de F. Déterminer la loi de probabilité de X et la représenter graphiquement.
3. Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement.
4. Calculer l'espérance et la variance de X
5. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = 3.X$
6. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y

Exercice 2

On lance un dé non pipé. On s'intéresse à la variable aléatoire X suivante :

- Si la valeur du dé est 1, X vaut 50.
- Si la valeur du dé est 5, X vaut 100.
- Pour toutes les autres valeurs du dé, X vaut 0.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Éléments de cours

Soient X et Y deux v.a. sur Ω. On suppose que $\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ et $\Omega_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$. On définit la loi conjointe du couple (X, Y) par l'application :

$$\begin{array}{rcl} q : \Omega_X \times \Omega_Y & \to & [0,1] \\ (x_i, y_i) & \mapsto & p_{i,j} = \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) \qquad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s \end{array}$$

On obtient *les lois marginales* de X et Y par :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad p_{i.} = \sum_{k=1}^{s} p_{i,k} = p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,s} = \mathbb{P}(X = x_i)$$
$$\forall j \in \{1, \dots, s\}, \quad p_{.j} = \sum_{k=1}^{r} p_{k,j} = p_{1,j} + p_{2,j} + \dots + p_{r,j} = \mathbb{P}(Y = y_j)$$

X et Y sont indépendantes ssi $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \forall j \in \{1, \dots, s\}, p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Exercice 3

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement, sans remise, deux boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si la seconde boule tirée est blanche et 0 sinon.

1. Donner la loi du couple (X, Y) (sous forme de tableau).
2. Calculer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reprendre les questions précédentes en considérant cette fois un tirage avec remise.

Exercice 4

Un canal de transmission d'information ne peut traiter que des 0 et des 1. À cause de perturbations dues à l'électricité statique chaque chiffre transmis l'est avec une probabilité d'erreur de $0,2$. Admettons que l'on veuille transmettre un message important limité à un signal binaire. Pour éviter une erreur on transmettra 00000 au lieu de 0 et 11111 au lieu de 1. Si le récepteur décode suivant la règle de la majorité, quelle est la probabilité que le message soit mal interprété ?

Exercice 5

Un journaliste se voit remettre une liste de personnes à interviewer. Il doit interroger 5 personnes au moins. Les interviewés potentiels n'acceptent de parler qu'avec une probabilité de $2/3$, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité qu'il puisse réaliser ses 5 entretiens si la liste compte 5 noms ? Et si elle en compte 8 ?

Exercice 6

Un enseignant excédé par le bruit dans un amphi décide de punir aléatoirement un étudiant chaque semaine. On sait que 90% des étudiants bavardent en amphi. On suppose que chaque semaine, l'enseignant ne tient pas compte de l'historique dans son tirage aléatoire. L'enseignant applique ce système de sanction pendant 13 semaines. On désigne par X le nombre de punitions « à tort ». Quelle est la loi de X. Quelle est la probabilité qu'au moins un étudiant puni l'ait été à tort ?

Exercice 7

Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs . On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de $0,83$. Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?
3. En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

Exercice 8

La bulle reçoit en moyenne la visite de 6 étudiants par jour pour un problème de compte bloqué. Supposant poissonnienne la loi de survenue de ces visites, calculer la probabilité pour que, la semaine prochaine, viennent pour les mêmes raisons : 1) aucun étudiant 2) 10 étudiants 3) 100 étudiants.

Exercice 9

Le secrétariat du département informatique reçoit en moyenne $0,1$ appel à la minute. Quelle est la probabilité pour que, entre 9h59 et 10h, il reçoive :

1. 0 appel ;
2. 1 appel ;
3. plus d'un appel.

Exercice 10

Dans une urne contenant 15 boules dont 5 sont noires, on prend au hasard et en même temps, trois boules. Calculer la probabilité :

1. d'avoir tiré au moins une boule noire ;
2. d'avoir tiré trois boules noires ;
3. d'avoir tiré exactement une boule noire.

Exercice 11

Reprenons l'exercice sur les championnats d'Europe de triathlon du TD précédent. Soit X la variable aléatoire du nombre de français parmi mes trois premiers à l'arrivée.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité de $\{X \geq 1\}$