

Travaux dirigés #1 : rappels sur le calcul des probabilités

Exercice 1

1. Combien y a-t-il de façons d'ordonner p éléments pris parmi n , avec remise ?
2. Combien y a-t-il de façons d'ordonner p éléments pris parmi n , sans remise ?
3. Combien y a-t-il de permutations de n éléments ?
4. Combien d'ensembles différents peut-on constituer en prenant p éléments parmi n disponibles (sans remise) ?

Exercice 2

1. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
2. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet :
 - En admettant les répétitions de lettres ?
 - Sans lettres répétées ?
3. Une multinationale décide de lancer un nouveau produit. Le nom de ce produit doit comporter 3 lettres.
 - Combien de noms peut-on former commençant par une consonne et se terminant par deux voyelles ?
 - Combien de noms peut-on former comportant une consonne et deux voyelles ?
 - Combien de noms peut-on former comportant une consonne et deux voyelles différentes ?
4. Combien d'anagrammes différentes peut-on former à partir du mot « ANAGRAMME » ? (une anagramme d'un mot contient les mêmes lettres que ce mot, placées dans un ordre différent ; exemple : « AAAEGMMNR »)

Exercice 3

Parmi les familles de 2 enfants, la moitié se trouve être « bien répartie », c'est-à-dire composée d'autant de garçons que de filles. En est-il de même parmi les familles de quatre enfants ? (on suppose ici que chaque naissance donne avec équiprobabilité un garçon ou une fille)

Exercice 4

On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de cartes de poker (qui contient 52 cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un *black jack*, ou autrement dit, que l'une soit un *As* et l'autre un *10*, un *valet*, une *dame* ou un *roi* ?

Exercice 5

Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point ; quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque 1. Pour qui parieriez-vous ?

Exercice 6

Lors d'une retransmission des championnats d'Europe de triathlon, un commentateur affirme, alors que 3 français font partie d'une échappée de 12 coureurs, que les chances d'obtenir au moins une médaille (i.e. arriver dans les trois premiers) sont de 1 sur 4. Il se trompe. Si on suppose que les chances des coureurs sont identiques, et que ces 12 coureurs occuperont les 12 première place de la course, quelle est cette probabilité ?

Exercice 7

Dans une promo de 135 étudiants, quelles sont les chances que deux étudiants aient la même date anniversaire ? (on négligera le cas des années bissextiles).

Question subsidiaire : à partir de combien d'étudiants cette probabilité est-elle supérieure à 0,5 ?

Exercice 8

Dans un pays imaginaire, la probabilité qu'un individu choisi au hasard aime les mathématiques est de 0,2. Par ailleurs, la probabilité qu'un individu choisi au hasard porte la même cape que Batman est de 0,5. Enfin, la probabilité qu'un individu choisi au hasard aime les betteraves rouges est de 0,1.

1. On sait maintenant que dans ce pays, la probabilité d'aimer les maths ET de porter une cape de Batman

est de 0,1. Les événements « aimer les maths » (qu'on notera A) et « porter une cape de Batman » (noté B) sont-ils indépendants ?

2. On sait maintenant que dans ce pays, la probabilité d'aimer les maths ET les betteraves rouges est de 0,05. Les événements « aimer les maths » (toujours noté A) et « aimer les betteraves rouges » (noté C) sont-ils indépendants ?

Exercice 9

On jette deux dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que leur somme vaut 7 ?

Exercice 10

On considère une famille avec deux enfants. On suppose que la venue d'une fille est équiprobable à celle d'un garçon.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'au moins un des enfants est un garçon ?

Exercice 11

Le sultan dit à Ali Baba: « Voici 2 urnes, 4 boules blanches (b) et 4 boules noires (n). Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche. »

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve, s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 noires dans la seconde ?
2. Idem avec $2b+2n$ dans la première urne et $2b+2n$ dans la seconde.
3. Idem avec $3b$ dans la première urne et $1b+4n$ dans la seconde.
4. Comment Ali Baba doit-il répartir les boules initialement pour maximiser ses chances ?

Exercice 12

Soit un système constitué de 5 composants A, B, C, D, E. Une panne du système est causée dans 35% des cas, par une panne du composant A, dans 30% des cas, par une panne du composant B, dans 20% des cas, par une panne du composant C, dans 10% des cas, par une panne du composant D et dans 5% des cas, par une panne du composant E. On suppose que les pannes simultanées dans plus d'une composante à la fois sont si rares qu'on peut les négliger.

1. Si une panne du système n'est pas causée par A, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par B ?
2. Si une panne du système n'est causée ni par A, ni par B, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par C ou D ?

Exercice 13

Une compagnie d'assurance répartit les assurés en 3 classes : personnes à bas risque, risque moyen et haut risque. Ses statistiques indiquent que la probabilité qu'une personne soit impliquée dans un accident sur une période d'un an est respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30. On estime que 20% de la population est à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque.

1. Quelle est la proportion d'assurés qui ont eu un accident ou plus au cours d'une année donnée ?
2. Si un certain assuré n'a pas eu d'accidents l'année passée, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque ?

Exercice 14

On compte respectivement 50, 75, et 100 employés dans trois entrepôts A, B et C, les proportions des femmes étant respectivement égales à 50%, 60% et 70%. Une démission a autant de chance de se produire chez tous les employés, indépendamment de leur sexe. Une employée donne sa démission. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entrepôt C ?