Calcul des probabilités

Rappels et notes de cours - *Rolling Release*

1 Rappels de vocabulaire et notations

On appelle **expérience aléatoire** toute situation dans laquelle le hasard intervient.

Exemples :

- jet d'un dé à six faces
- tirage de deux cartes dans un jeu mélangé en contenant cinquante-deux
- choix d'un échantillon de 1000 individus dans la population française
- transmission d'informations dans un réseau perturbé
- le temps qu'il fera demain
- génération aléatoire d'un `float`

Les **issues** d'une expérience aléatoire sont les différents résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Exemple :

« Obtenir un 1 », « obtenir un 2 », « obtenir un 3 », « obtenir un 4 », « obtenir un 5 », « obtenir un 6 », sont les issues de l'expérience aléatoire « Jet d'un dé équilibré à six faces »

L'ensemble des issues possibles constitue l'**univers** de l'expérience aléatoire.

Dans l'exemple précédent, si on note E l'expérience aléatoire « Jet d'un dé équilibré à six faces », l'univers –que l'on notera Ω– peut-être représenté par l'ensemble :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

où chaque entier représente une issue possible.

Un **événement** est une proposition dont on peut dire qu'elle est vraie (l'événément s'est réalisé) ou fausse (l'événement ne s'est pas réalisé) en observant le résultat de l'expérience aléatoire. Généralement, on cherche à évaluer les chances qu'un événement a de survenir.

Formellement, un **événement** est un **sous-ensemble de l'univers**. Il correspond à l'ensemble des issues qui vérifient la proposition associée.

Dans l'exemple précédent, si on appelle A l'événement « Obtenir un entier pair », on a :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

On peut composer des événements :

- par **conjonction** d'événements : « A et B » $= A \cap B$ est l'ensemble des issues vérifiant simultanément les événements A et B
- par **disjonction** d'événements : « A ou B » $= A \cup B$ est l'ensemble des issues vérifiant l'un ou l'autre des événements A et B, ou les deux simultanément
- par **négation** d'événement : « non A » $= \overline{A} = \Omega$
  A est l'ensemble des issues qui ne vérifient pas A

2 Rappels de probabilités

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Une **probabilité** est une fonction qui associe, à un événement, une valeur réelle comprise entre 0 et 1. Cette valeur permet de quantifier les chances que l'événement a de se produire.

Si on note Ω l'univers des issues de l'expérience aléatoire, et $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les événements possibles, une probabilité est une fonction :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0; 1]$$

Cette fonction doit vérifier les propriétés suivantes :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- Si $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On a également les propriétés suivantes:

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

2.2 Calcul

Trivialement, lorsque les issues ont toutes les mêmes chances de survenir (on parle d'équiprobabilité), on calcule la probabilité de survenue d'un événement comme la proportion d'issues favorables à l'événément (le nombre d'issues pour lesquelles la proposition est vraie) parmi l'ensemble des issues possibles.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

Une autre interprétation consiste à considérer que la mesure de probabilité d'un événement est la fréquence de survenue de cet événement lorsqu'on répète indépendamment et dans les mêmes conditions, un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

2.3 Indépendance et conditionnement

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On appelle **probabilité conditionnelle** de A **sachant** B (en supposant donc que B n'est pas impossible) et on note $\mathbb{P}_B(A)$), la probabilité que l'événement A a de survenir lorsque l'on sait que B va se réaliser ou s'est réalisé.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On peut alors redéfinir l'indépendance de deux événements de la manière suivante : deux événements A et B sont indépendants si et seulement si on a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

2.4 Système complet d'événements

Un ensemble d'événements $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ forme un **système complet d'événements** sur Ω si :

1. Toute issue est favorable à l'un des événements : $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$
2. Les événements sont deux à deux incompatibles :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$

Un système complet d'événements est donc une partition de Ω. L'exemple le plus évident de système complet d'événement est l'ensemble formé par un événement quelconque A et son complémentaire $\overline{A}$

La formule des **probabilités totales** permet de déterminer la probabilité d'un événement en le décomposant sur un système complet d'événements.

2.5 Formule des probabilités totales

La décomposition d'un événément B sur un système complet d'événements $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ permet de calculer sa probabilité de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B) \times \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B) \times \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}_{A_n}(B) \times \mathbb{P}(A_n)$$

2.6 Formule de Bayes

La **formule de Bayes** permet d'établir un lien entre $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_B(A)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Et en décomposant B sur $\{A, \bar{A}\}$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \times \mathbb{P}(\bar{A})}$$

3 Variables aléatoires

Une **variable aléatoire** est une fonction qui transforme les résultats d'une expérience aléatoire en valeurs numériques *(le plus généralement)*. Une **variable aléatoire continue réelle** peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est une fonction de Ω dans $I \subseteq \mathbb{R}$. Une **variable aléatoire discrète** peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs. On peut la représenter par une fonction de Ω dans $I \subseteq \mathbb{N}$.

On note Ω_X l'espace image de Ω par X :

$$\Omega_X = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$$

La probabilité associée à une variable aléatoire se calcule de la façon suivante :

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de Ω_X :

$$\mathbb{P}(\{X \in \mathcal{B}\}) = \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \in \mathcal{B}\})$$

L'expression de cette mesure de probabilité, en extension ou sous forme d'une fonction mathématique, définit la **loi de probabilité** de X.

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque, quels que soient les ensembles de valeurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ prises respectivement par X et Y, on a :

$$\mathbb{P}(\{X \in \mathcal{B} \text{ et } Y \in \mathcal{C}\}) = \mathbb{P}(\{X \in \mathcal{B}\}) \times \mathbb{P}(\{Y \in \mathcal{C}\})$$

Remarque : dans la suite on notera $\mathbb{P}(X = i)$ pour $\mathbb{P}(\{X = i\})$ pour simplifier (ou encore $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$ pour $\mathbb{P}(\{X \in \mathcal{B}\})$)

3.1 Cas discret

Lorsque la variable aléatoire étudiée est discrète, on peut définir l'espérance et la variance de X de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \Omega_X} k.\mathbb{P}(X = k)$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

On peut aussi calculer la variance en utilisant la réécriture suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

3.1.1 Loi de Bernoulli

Lorsque $\Omega_X = \{0, 1\}$ et que :

- $\mathbb{P}(X = 1) = p$ ($p \in [0, 1]$)
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

on dit que X suit une loi de Bernoulli, et on note $X \simeq \mathcal{B}(p)$.

On a par ailleurs : $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p.(1 - p)$

3.1.2 Loi binomiale

Lorsqu'on répète n fois, indépendamment et dans les mêmes conditions, une expérience aléatoire à l'issue de laquelle un événement à la probabilité p de se produire, la variable aléatoire X du nombre de fois où l'événement s'est réalisé suit une **loi binômiale** de paramètre n et p. On note : $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ et on a :

- $\Omega_X = \{0, 1, \ldots, n\}$
- $\forall k \in \Omega_X, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ ($p \in [0, 1]$)
- $\mathbb{E}(X) = np$
- $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$

3.1.3 Loi géométrique

Lorsqu'on répète, indépendamment et dans les mêmes conditions, une expérience aléatoire jusqu'à ce qu'un événement (dont la probabilité de se produire est $p \neq 0$) survienne, la variable aléatoire X du nombre de répétitions qui ont été nécessaires suit une **loi géométrique** de paramètre p. On note : $X \sim \mathcal{G}(p)$ et on a :

- $\Omega_X = \{1, \ldots\}$
- $\forall k \in \Omega_X, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ ($p \in [0, 1]$)
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
- $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3.1.4 Loi hypergéométrique

Lorsqu'on effectue n tirages sans remise, dans une urne contenant N boules, dont $N_1 = pN$ sont gagnantes (et $N_2 = (1-p)N$ perdantes), si on note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules gagantes piochées, alors X suit une **loi hypergéométrique** de paramètres N, n, p et on note $X \sim \mathcal{H}(n, p, N)$.

- $\Omega_X = \{max(0; n - N_2), \ldots, min(n; N_1)\}$
- $\forall k \in \Omega_X, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{N,n}$
- $\mathbb{E}(X) = np$
- $\mathbb{V}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

3.1.5 Loi de Poisson

Lorsqu'un événement survient en moyenne $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fois dans un laps de temps donné, le nombre d'occurences X dans l'intervalle correspondant suit une **loi de Poisson** de paramètre λ). On note alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et on a :

- $\Omega_X = \{0, 1, \ldots\}$
- $\forall k \in \Omega_X, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $\mathbb{V}(X) = \lambda$

3.2 Cas continu

Une variable aléatoire X dont Ω_X est continu est dite continue. On s'intéressera dans ce cours au variables aléatoires réelles ($\Omega_X \subset \mathbb{R}$).

La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est définie par une fonction p appelée fonction de densité de probabilité telle que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b), \mathbb{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette probabilité correspond à l'aire, sous la courbe associée à p, entre a et b.

La probabilité pour que X prenne une valeur x est toujours nulle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0$$

On a donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a)$$

On a naturellement : $\mathbb{P}(-\infty \leq X < +\infty) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

3.2.1 Fonction de répartition

Il est toutefois possible de calculer $\mathbb{P}(X \leq x)$. On définit la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ t & \mapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$$

La fonction de répartition a les propriétés suivantes :

- F est croissante
- $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$

Si X est une variable aléatoire réelle et que sa fonction de répartition F_X est continue et dérivable, alors sa dérivée $f = F'$ est la **fonction de densité de probabilité** de X.

3.2.2 Espérance et variance

On définit l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle continue X de densité f par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t f(t) \,\mathrm{d}t$$

$$\mathbb{V}(X) = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t) \,\mathrm{d}t - (\mathbb{E}(X))^2$$

3.2.3 Loi normale

Lorsqu'une variable aléatoire admet une densité de probabilité de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

on dit qu'elle suit une loi normale de paramètres m et σ^2, et on note $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ on parle de **loi normale centrée-réduite**.

Si $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma} \sim /;\infty$.

Si $X \sim /;\infty$, on a les propriétés suivantes :

- $F_X(0) = 0,5$
- $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$

Résumé graphique :

$$A = D \text{ et } B = C$$

$$A + B + C + D = 1$$

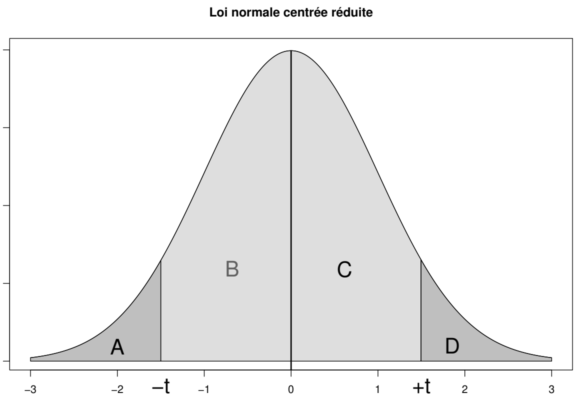

Figure 1: Loi normale centrée réduite

---

4 Convergence de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes**. Soit X une variable aléatoire. On note F_i la fonction de répartition des X_i et F celle de X.

4.1 Convergence en loi

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F$$

Exemple :

$$\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

4.2 Le théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.

- de même loi sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
- deux à deux indépendantes,
- d'espérance μ et de variance σ^2 (finies).

Si on pose

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

et

$$Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Alors $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a. de loi normale centrée réduite.

Autre formulation

En posant :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

On peut peut écrire que, pour n assez grand :

$$\sqrt{n}.\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0;1)$$

Exemple important : convergence de la loi binomiale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. On sait que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mu = \mathbb{E}(X_i) = p$ et que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X_i)} = \sqrt{pq}$.

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. On sait donc que S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

D'après le TCL, on a donc :

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \approx \mathcal{N}(0;1)$$

Conséquence pratique

On considère *parfois* que tout phénomène qui est la somme de phénomènes aléatoires indépendants peut-être modélisé à l'aide d'une loi normale.

4.3 Convergence en probabilité

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

4.4 Loi (faible) des grands nombres

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, ayant même variance finie σ^2 et même espérance μ.

Soit

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Application

Supposons que l'on cherche à calculer la survenue d'un événement A lors d'une expérience aléatoire (reproductible indépendemment).

On décide de répéter n fois l'expérience.

Lors de la i-ème répétition, on appelle X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si A s'est réalisé et 0 sinon.

On sait donc que X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$ inconnu.

L'espérance et la variance de chaque X_i sont respectivement p et pq.

Posons $\bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$. D'après la loi des grands nombres on sait que $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers $\mu = p$. Autrement dit : $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers $\mathbb{P}(A)$

Conséquences

On peut donc **calculer la probabilité d'un événement comme la limite de la fréquence de survenue de cet événement, lorsque l'on répète un grand nombre de fois et indépendemment l'expérience aléatoire**.

On justifie ainsi la définition fréquentiste de la probabilité :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

Ainsi, comme *le dit Wikipedia* "La loi des grands nombres permet de dire que la loi de probabilité de X peut être approchée par la répartition de la population de l'échantillon pour n assez grand."